ネッカーキューブはなぜあの立体に見えるのか

日高 昇平¹ 高橋 康介²

¹ 北陸先端科学技術大学院大学 ² 中京大学

Why does Necker Cube appear as the three-dimensional shape?

Shohei Hidaka¹ Kohske Takahashi²

¹Japan Advanced Institute of Science and Technology ²Chukyo University

Visual perception, receiving a two-dimensional (2D) visual input, often constructs the three-dimensional (3D) perceptual image. Although there are generally multiple structures in the external world that give an equivalent two-dimensional retinal image, the perceptual process naturally and easily infer only one 3D structure as the solution. However, the following problems are not obvious at all: what kind of structure can be obtained as a 3D perceptual image from certain 2D information, and why do we get a three-dimensional perceptual image instead of a two-dimensional one. In the present study, we investigate this problem by untangling the Necker cube phenomenon, and propose a novel theory of three-dimensional visual perception from the viewpoint of the efficiency of information coding. Among the possible structures that can yield the 2D retinal image of the Necker cube, the structure of the typical three-dimensional perceptual image of the Necker cube maximizes the symmetry (in group theory). This maximization of symmetry is characterized by the pairs of adjoint functors (in category theory). Therefore, according to this proposed theory, “the Necker cube” in the three-dimensional space is perceived as the most efficient encoding of the two-dimensional retinal image.

Keywords: Visual Perception (視知覚), 3D Perception (3次元知覚), Necker Cube (ネッカーキューブ), Symmetry and Group Theory (対称性と群論), Category Theory (圏論), Adjoint Functors (随伴関手)

Received 15 July 2020; Accepted 31 August 2020; Available online at J-STAGE 15 October 2020

1. はじめに

1.1 背景

我々人間は外界の構造をいとも簡単に自動的に知覚し認識する。知覚を成立させる感覚モダリティは複数存在するが、本研究ではその対象を視覚に限定することとする。視知覚は、知覚の主体である我々にとってあまりにも自然に、困難なく機能しているため、その背後にある計算理論や情報処理の複雑さ、そして知覚の本質的な謎は見逃されがちである。しかし眼球と脳からなる視覚系という生体の制約と光学系という物理的制約を考慮すれば「なぜ世界がこのように知覚されるのか」という問いに答えることが極めて困難であることは直ちに明らかとなる。

本研究では謎に満ちた視知覚の中でも、特に3次

* 本研究は科学研究費補助金 20H04994 の補助を受けた。

元視知覚に焦点を絞る。なお、現実の知覚過程では輝度や色などの空間以外の視覚情報や時間情報とその変化なども利用可能であるが、本研究では空間構造だけで特徴づけられる静止画であるネッカーキューブを対象とするため、空間次元に限定して議論を進める。哲学から生理学、心理学にいたる3次元視知覚研究の歴史的背景については林部(林部, 2001)に詳しいが、まずは本研究の背景となる問題を明確にしておく。そのためにいくつかの前提を述べておこう。第1は知覚現象の光学的・神経生理学的な枠組みである。外界の構造は光として網膜に至り、網膜と脳が連合した情報処理の結果、知覚が生まれる。第2に知覚のための情報処理過程への入力、つまり網膜像は空間的にたかだか2次元である。第3に知覚される像が空間的に3次元となることも多々ある。第4に等しい網膜像を作り出

す外界の高次元構造は無限に存在する（不良設定問題）(Marr, 1982). 第5にそのような無限に存在する高次元構造に対し、知覚される構造はひとつ（多義図形であれば少数）に限られる。したがって視覚系は2次元の情報を用いて、それを生成することが可能な高次元構造の無限の可能性の中から唯一の解らしきものを推定するという、逆問題を解く推論過程ということになる（ヘルムホルツの無意識的推論）。この推論が理論的には全く容易ではないことは明らかだが、現実的には我々人間は困難なくこの問題を解いている。認知心理学者ドナルド・ホフマンはこれをビジュアル・インテリジェンス（Visual Intelligence; VI）と呼んでいる（ホフマン, 2003）。

以上の前提から、いくつもの問題が浮かび上がる。なぜ立体を知覚しているとき、たかだか2次元の情報から推定される知覚像は（2次元でも4次元でもなく）3次元なのか。なぜ同時に複数の可能な構造を知覚することができないのか。そして、なぜ複数の可能性の中から「その知覚像」が選択されるのか。

これまでの3次元視知覚に関する研究の多くは、複数の可能性の中から「その知覚像」が選ばれる法則を見つけ出してきた（ホフマン, 2003）。例えば単眼静止画像では、見えの偶発性と安定性、構造の滑らかさ、遮蔽関係、テクスチャや陰影（Todd, 2004）、その他様々な諸要素が複雑に絡み合い、もっともありそうな構造を知覚するといった説明がなされている。これらの法則は、我々人間の視知覚経験を記述するものとして有用ではあるが、視知覚現象を理解するものとしてはいささか不十分である。というのも、例えば現実のさまざまな場面においてどの法則が適用されるかという点については、そう見えているからその法則が用いられているという説明になりがちであり、「なぜその法則が必要なのか」について理論的根拠が曖昧なものが多い。なお両眼が使える状況であれば両眼立体視における両眼視差、運動情報が使える状況であれば運動視差なども3次元構造の推定に利用可能であるが、本研究では単眼静止画像を対象とするため、両眼視差や運動視差に関する議論は保留する。

本研究も次元の選択も含めて「なぜその知覚像が選ばれるのか」という問題に取り組み、3次元視知覚の制約となる新たな法則を提案する。この法則は見えを説明するものであるものの、その説明原理は

図1 ネッカー平面図 (A) とその典型的な知覚像としてのネッカー立体 (B, C). (D) はコッファーマンキューブ (ホフマン, 2003). (E, F) は三角形として知覚される平面図 (E) と正四面体のシルエットとして知覚される（すなわち立体が見える）平面図 (F) (Koenderink, 1984).

情報の効率的符号化に置く。つまりそう見えるからその法則が用いられているというだけでなく、その方が情報を効率的に保存できるという点に説明原理を求めるものである。

1.2 ネッカーキューブ

本論文では議論を進めるための題材としてネッカーキューブ現象（以降、単にネッカーキューブ）(Necker, 1832) を扱う。ネッカーキューブでは2次元平面に描かれた線画（図1A; 以降、ネッカー平面図）が与えられたときに、典型的には2種類の異なる立体（図1B, C; 以降、ネッカー立体）が知覚される。したがってネッカー平面図は多義図形であり、その知覚的解釈は時間とともに遷移する。

本研究でネッカーキューブを題材とする利点を述べておく。ネッカーキューブは現実の3次元知覚に比べて極端に単純化された状況であると言える。単眼静止画像として与えられるため運動視差や両眼視差などの手がかりが利用できない。単色の線画のため、明確な遮蔽、テクスチャ、陰影などは存在しない。さらにネッカーキューブがもたらす3次元知覚像は明確であり、個人差も少ない。このように現実場面で存在する多様な要因を一旦は保留できること、また知覚の個人差や確率的挙動を保留できることなどから、説明原理の検討に適していると考えられる。一方で本研究は現実の3次元知覚に付随する多様な要因を捨象した状況についての考察であり、現実の3次元知覚へ直ちに一般化できるかどうかは別途検討を要することになる。

ネッカーキューブを用いて、これまでさまざまな視点から知覚に関する研究が行われてきている。第一に、ネッカー平面図を多義図形刺激の代表例として扱い、ヒトの知覚における多義性解決過程に着目するものである (Kornmeier & Bach, 2005)。行動学的、あるいは脳科学的実験研究により、知覚交替の頻度や解釈に影響する要因の同定、関連する脳内基盤の検討などが行われてきた。ここではネッカー平面図が 2 種類の立体として解釈されやすいということは前提であり、問題とはされない。したがって本論文との関係は薄い。

第二にネッカー平面図が 2 種類の立体に見えやすいという経験的事実から、視覚情報処理の性質を描出するというものである (ホフマン, 2003)。これは知覚過程をベイズ推定とみなした際の尤度関数について検討していると言い換えてもよいだろう。本研究もネッカー平面図の分析とそこに現れる知覚像という経験的事実の関係を出発点に知覚の原理を見出すことを目的としており、位置づけとしてはこの流れに沿ったものである。

第三に、知覚という現象を理解するための論考の題材として扱われることもある。例えば現象学者メルロ・ポンティは「知覚の現象学」の中でネッカーキューブを例に挙げて奥行きや空間の知覚に関する議論を展開している。本研究が提案するネッカーキューブの知覚モデルからは、なぜネッカー平面図が 2 次元でも 4 次元でもなく 3 次元のネッカー立体として知覚されるのかという問題も付随するため、部分的にはこのような空間知覚の問題にも関連する。

1.3 本研究の概要

本研究ではネッカーキューブの知覚モデルを提案するが、その際に定量的なデータ適合性について実証実験により評価を行うのではなく、素朴な事実と観察される現象から理論を構築する (Hertzmann, 2020; Koenderink, 1984; Nakayama & Shimojo, 1992)。線画からなるネッカー平面図 (図 1A) は 3 次元立体として知覚され、それは 2 種類のネッカー立体のいずれかである (図 1B, C)。このことはおよそ大部分の人によって共有されている事実と現象であり、特に本研究において実証実験による検証を必要とするものでも、定量的なデータ適合性の対象となるものでもない。このように自然に経験される現象では

あるが、「なぜネッカーキューブに対してそう見えるのか」という点では全く自明ではなく、以下のような問が生じる。

- (1) ネッカー平面図が 2 次元の平面図形としてではなく 3 次元の立体図形として知覚されやすいのはなぜか。
- (2) 無限にあり得る立体としての知覚的解釈の中で、典型的に 2 種類のネッカー立体が知覚されやすいのはなぜか。

1 番目の問題は 3 次元視知覚一般に関する問題と言えるが、ここではネッカーキューブを例に検討する。ネッカーキューブではあまりにも容易に立体としての知覚が生まれるために見逃されがちだが、ネッカー平面図は 2 次元平面として知覚されてもよいはずである。例えばコッファーマンキューブ (図 1D) と呼ばれるネッカーキューブに類似の図形では、3 次元の立体図形の知覚は可能ではあるが優位ではない。したがってネッカー平面図の中には、それを 3 次元に知覚させるための情報があると推測できる。また本研究では直接扱わないが、線画ではなくシルエット像に対しても、同様の問題が起こる。図 1E は 2 次元平面としての知覚が優位であり、図 1F は 3 次元立体 (正四面体) としての知覚が優位であるように思える。このように網膜像に与えられた平面図は何でも 3 次元立体として知覚されるわけではないのである。

なぜネッカーキューブではネッカー平面図が立体に知覚されやすいのか、あるいはより一般化し、与えられた平面図が 2 次元と 3 次元のどちらに見えるのか、この問題を解くためには何らかの選択基準を考える必要がある。そこで本研究では対称性の概念を導入し、対称性にもとづく情報の効率的符号化を知覚像選択の原理として提案する¹⁾。この原理のもとで、平面としての知覚、立体としての知覚それぞれの情報量を相対的に評価可能となる。

2 番目は更に複雑である。なぜなら、ネッカー平面図に対する 2 次元の知覚像とネッカー立体という 3 次元の知覚像の比較だけでは不十分で、ネッカー平面図を生成しうるあらゆる構造よりもネッカー立体が優位であることに言及する必要があるからであ

1) 視知覚における像や構造の対称性についての研究は多くある (新美・横澤, 2007) が、そこでは 3 次元空間における構造の対称性が 2 次元画像から立体知覚のために何らかの機能を果たしている可能性にも言及されている。本研究での対称性は像や構造そのものではなく変換群の対称性であるが、両者は密接に関係している可能性もある。

る．本研究では上記の効率的符号化の導入により，この問題への回答が自然に導かれる可能性についても議論する．

2. 本研究のアプローチ

2.1 効率的な符号化としての視覚

以上を踏まえ，我々の視覚情報処理に関する仮説を述べる．まず，我々は視覚を効率的な視覚的データの符号化として捉える (日高, 2016)．ここでの視覚的なデータとは，本稿の範囲では網膜像あるいはそれを抽象化した 2 次元平面上のパターン (これは本質的に，2 次元平面を定義域にもつ実数値関数と同型) のことを指す．つまりいわゆる“画像”が視覚的なデータとして与えられると考える．その画像のパターンを効率よく符号化するのが視覚情報処理であると捉える．

仮に網膜像を第一義的な視覚データとしたとき，雑多な点の集まりとしての視覚データにおいて，一定の構造をもつ点の集まりを効率よく符号化することは，有限な認知資源をもつ生物にとって必要不可欠に思われる．仮に高い効率性を持つ符号化が得られるのであれば，データには必ずしも存在しない解釈を加えることも有効ではないだろうか．本研究では，知覚をそうした高い効率性をもつデータの符号化として捉え，ネッカーキューブの知覚において平面的な視覚データから立体構造が解釈として生起する現象を説明する．

議論を単純化するために，画像が二値 0, 1 のみをとるとし，1 をとる 2 次元平面上に点があると考え．このような単純化された画像クラスでも，ネッカーキューブを含めた線画状の視覚データを表現でき，以降の議論において本質を失わないため，以後こうした単純化された画像クラスのみを考える．その場合に，「効率の良さ」は，本質的に平面上の点の (部分) 集合のもつ対称性によって測られると考える．

この考え方をネッカーキューブで詳細に展開する前に，いくつかより簡単な図形を視覚データの例として取り上げて説明をしたい．まず最も単純な場合である，真っ暗な状況で光点が 1 点だけある視覚データを考えよう．この場合，視野全体を 2 次元ユークリッド空間で表現した場合，その光点の位置 (座標) と光の強度だけを記録しておけばよい．以降，本論文の議論を単純化するために，光の強度は，光

の有無の 2 状態だけをとり，それぞれ二値 1, 0 のいずれかで表すとする．1 つの光点の場合，この視覚データは 2 次元ユークリッド空間上の 1 点の座標の値で表せるので，

$$(x, y) \in V_2$$

と書ける．同様に，暗闇に 2 つの光点があれば，それらは 2 つの座標の組

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in V_2 \times V_2$$

と表現でき，光点が n 点であれば

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)) \in V_2^n$$

と表現できる．一般に，2 次元平面上の n 個のデータは $2n$ 次元の座標によって表せるが，もし n 個の点が，以下のような特殊な構造を持っていたとしたらどうだろうか：

$$((x_1, ax_1 + b), (x_2, ax_2 + b), \dots, (x_n, ax_n + b)) \in V_2^n.$$

ここで $a, b \in \mathbf{R}^1$ はある実定数だとする．この場合，

$$(a, b, x_1, x_2, \dots, x_n) \in V_{n+2}$$

だけを記録しておき， $y_i = ax_i + b$ によって視覚データを“復号”できる． $n+2$ の座標だけではなく，その復号の方式も記録する必要があるため， $n \leq 2$ のときはこの復号は，単に n 個の座標を記録する符号化の方式に比べて利点がない．しかし， $n > 2$ の場合には，復号の計算量を考慮する必要はあるものの， n が大きくなるほど情報圧縮の効果がある．そして，この視覚データの復号は，これらの点の集合を“直線”と解釈していることに相当すると考えられる．データには必ずしも存在しない直線 $\{(x, y) \in V_2 \mid y = ax + b, x \in \mathbf{R}\}$ を復号に用いることでデータを効率よく符号化できる．

これらの例を眺めて，読者の一部はこの議論に疑問を持つかもしれない．仮に“直線”でなくても， n 個の点を通る曲線や折れ線はいくらでも描けるはずではないか，それらの曲線や折れ線で効率よく復号できるのであれば，“直線”を特別に扱う必要はないではないか，と．確かに，もしどの異なる 2 点も $x_i \neq x_j$ を満たすならば ($1 \leq i \neq j \leq n$)，それらの n 点を通る $n-1$ 次多項式

$$f_{(x_1, \dots, x_n)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

が一意に存在する (ラグランジュ多項式補完). この多項式を利用し, $y = f_{(x_1, \dots, x_n)}(x)$ とすれば, 直線による復号の場合と同じく, x から y を算出できる. しかし, このような復号を可能にする多項式を特定するにはその n 個の係数 $(a_0, \dots, a_{n-1})$ を記録しておく必要があるため, 全体としてやはり $2n$ 次元の座標を記録しておく必要が生じる. そのため, 必ずしも直線でなくてもよいが (例えば, 4 点以上を通る 2 次多項式でもよい), 一般には n 点を通る $n-2$ 次以下の多項式などの特別な構造が効率的な符号化には必要になる²⁾.

2.2 対称性による復号

この「特別な構造」とはいったい何だろうか. これは, n 点が一つの直線上にある例で言えば, これらの n 点のうちどの 2 点を選んでも, それらの点を通る直線が同じである, という冗長性, あるいは対称性にある³⁾. 言い換えれば, n 点のうちどの 2 点を選んで交換しても, 同じ直線を符号化できる. このように, データ点の間にある種の対称性があるとき, それを利用した効率のよい符号化が存在すると言ってもよいだろう.

2.3 図形を不変にする変換群

対称性を捉えるのに有用な数学的概念として群がある⁴⁾. ある図形 A がある図形 B よりも”多くの対称性を有する”ということを群論を用いて言い換えれば, 図形 A を不変にする変換群は, 図形 B を不変にするすべての変換群を部分群として持つ, と言えるだろう. この場合, 図形 B を不変にする変換群から図形 A を不変にする変換群への群準同型写像がある. 従って, このような写像の有無によって順序付けられた群の空間において, 与えられた図形を不変にするある変換群から始めて, そうした準同型をたどり, もうその群から他への準同型がないような群に当たるまで”群構造の最適化”を行うことで, 望ましい効率性を持った構造を見つけられるこ

2) さらに, そうした多項式を特定する計算量も加えて必要となる.

3) k 次多項式のラグランジュ多項式補完の場合, n 個の点のうちどの $k+1$ 個の点を選んでも同じ多項式である. これを利用した秘密鍵を分散する方法としてシャミアの秘密分散法 (Shamir, 1979) がある.

4) 変換群構造説から始まる一連の研究 (今井・天野, 1998) では, 特にパターンの認知過程について群論の概念を導入した解析と実証が行われている. 本研究とも深く関わる可能性があるが, 現在のところ未検証である.

とになる.

2.4 圏論による定式化

こうした一連の論考を包括的に構築する言語として圏論が適切であると考えられる. 圏論では対象と射をもつ数学的構造で (圏論に関する簡潔な説明は本号の圏論に関するチュートリアル記事およびその付録等 (チュートリアル記事著者, 2021) を参照), 以上で述べた群も圏の一種である.

さて, すでに述べた, ある図形を不変にする変換群の間の準同型は, 元のデータを復号できるという条件によって制約されていなければならない. これは, 概して言えば, 元のデータ (網膜像) を表すある種の画像形式の圏から, ある種の変換群の圏への関手であることを保存しなければならない, と言い換えられる. 従って, この条件下での群の圏の射である群準同型は, 元のデータから群の圏への関手の間の射である, 自然変換⁵⁾ である. この自然変換をたどることによって行き着いた先の群からは, また元のデータに戻る (データを復号する) ことができるはずで, この群からデータへ”戻る”関手は, データの圏から群への関手と一対の構造をとる. 従って, 元のデータの圏と群の圏の間関係としては, 圏論における「随伴」(マックレーン, 2012) という形式の同一性をもつと期待される.

このような図形の集合と変換群の関係は, ガロア接続と呼ばれる, 前順序集合の圏の随伴の一種として捉えることができる. 言い換えれば, 効率的な符号化としての知覚とは, データの圏から群 (あるいはモノイドやより一般の圏) への随伴 (前順序を備えた圏の間の随伴をガロア接続とも呼ぶ) を構成することだと言える.

2.5 問いの再定式化

以上の考えかたを基に, 本研究では, このネッカー平面図がもつ潜在的な変換群の構造および, それらの図形と変換群の間の随伴について数理的に分析する. これにより知覚を特定の変換群の下での対称性 (図形の不変性) を最大化する情報処理と捉え, 1 節の 2 つの問いを以下のように再定式化した上で, 問 (1) および (2) に答える.

- (1) 2 次元のネッカー平面図よりネッカー立体のほうが高度な対称性をもつか (対称性最大化

5) この自然変換は群準同型を関手とする関手圏の射である.

の情報処理機構において、ネッカー立体のほうが平面図より生起しやすいか)

- (2) 2次元のネッカー平面図とある種の同一性をもつあらゆる図形のなかで、最も高度な対称性をもつ2次元平面図、あるいは3次元立体は何か。

3. ネッカー立体知覚のモデル：スケッチ

本研究の知覚に関する仮説を数学的に定式化し、ネッカーキューブの知覚に関する命題を導くために、いくつかのステップに分けて論証を行う。本節では、その論証の概要を順を追って述べる。

3.1 点画の圏から線画の圏へ

最も基本的な視覚データの表現として、2次元(あるいは3次元)ベクトル空間上の点のそれぞれに有無(あるいは白と黒, 0と1)が与えられている点画の集合を考える(図2(c))。2次元平面の場合には、これは(ベクトル空間を離散化して表現した場合に)”ビットマップ形式”のようなデータ表現を表している。あるいは3次元の場合はボクセル(voxel)で表した点群のようなデータ表現である。任意の視覚データが網膜ではこの形式で表現されると考える。

この点画の圏は、任意の視覚的なパターンを表現可能であるが、それぞれのピクセルを個々に1点として表しているため構造に乏しく符号化の効率はよくない。そこで、2節で述べたように、直線上の配置した点の集合を線分としてまとめた”線画”による表現を考える(図2(b))。これは、出来得る限り直線で表現できる点をすべて直線に変換した表現で、線分が基本構成要素であるような”ベクター形式”の画像ともいえる。

3.2 線画の圏からグラフ画の圏へ

線画の圏は、個々の点で表現する点画の圏よりも構造をもつものの、それでも個々の線分は独立な(離散圏としての)構造しかもたない。

線画の圏はさらに効率的に符号化でき、それはグラフの集合による表現である。頂点と辺の集合の組からなるグラフの集合からベクトル空間への写像を、グラフ画の圏とする。このグラフは、最も離散的な場合(線画の圏における各線分が、2頂点と1辺のみをもつグラフに対応する場合)には、線画の圏と同じである(あるいはさらに頂点だけのグラフ

とみることで点画の圏とも同一視でき、これらが後述する忘却関手に相当する)が、最も構造を持つ場合には1つのグラフ(図2(d))のベクトル空間への埋め込みによって線画を表すことができる。

具体的に、ネッカー立体(図1B, C, 図2(a))は8つの頂点、12の辺をもつグラフ(8頂点間の3-連結グラフで最小の辺数をもつ無向グラフ)をベクトル空間にうつす写像の一つと同一視できる。以後このグラフをネッカーグラフと呼ぶ。ネッカー平面図以外にも、一般に、任意の頂点や辺をもつ線画を、任意の有限の頂点をもつグラフの圏から2次元平面への写像の一つとみなせる。

3.3 異なる画像形式の圏の間の随伴

ここまで点画、線画、グラフとして圏を構成してきた。ここで視覚情報処理の脳内神経基盤について考えると、網膜から外側膝状体に至る方位選択性を持たないレチノトピックな表現は点画の圏の構成、方位選択性を持つエッジ検出が行われる初期視覚野でのやはりレチノトピックな表現は線画の圏の構成、そしてレチノトピーが失われオブジェクトの構造が表現されるV3以降の高次視覚野ではグラフ埋め込みの圏の構成という対応関係が見て取れる。以下に示すよう、これらの異なる階層の表現の間に随伴関係を仮定するというのが本研究の主張である。

3.4 グラフ埋め込みの圏の対称性

点画を線画で表現することでより効率的な符号化が得られるように、このグラフの埋め込みもさらに効率的な符号を構築する過程と解釈することができる。線画の圏では線分間の関係はなく、個別の線分を独立に扱う必要があったが、線分の結合の関係を表すグラフの場合、最も効率的な条件では一つのグラフで全体的な構造をもったデータの表現が可能になるからである。その一方で、グラフによる符号化を可能とするには一定の条件を満たす必要がある。

2.3節で説明したように、定性的に言えば、この効率性は与えられた線画を変えない変換群の大きさによって測られる。具体的に、ベクトル空間上の線画の圏を特定のグラフで表す(随伴関手を構築する)には、埋め込むグラフ集合の各グラフのもつ構造であるグラフ準同型を保存する必要がある。この性質のため、単に各頂点と各辺が、ベクトル空間上の端

図 2 (a) ネッカーグラフの埋め込みは (b) 対応する線画の圏、線画の圏は (c) 点画の圏との間に随伴関手をもつ。
 (d) ネッカーグラフはネッカー平面図に対応する任意のグラフの中で最大であり、(e) 線画の圏を構成する線分は、(f) 画像の圏の点を被覆する線分の集合の中で最大である、という普遍性をもつ。

点と線分に対応するだけではなく、グラフのもつ対称性 (グラフ準同型による置換群) もベクトル空間における対称性 (アフィン同型による置換群) に対応する必要がある。従って、どんな線画でもネッカーグラフで符号化することはできず、実際、平面上のネッカー平面図へはネッカーグラフからの関手が存在しない。

3.5 アフィン変換群による特徴づけ

ネッカーグラフは 48 のグラフ準同型を持つため、このグラフの埋め込みにより線画を符号化する場合、少なくともこの 48 の準同型を (忠実な関手により) 対応づける先としてベクトル空間上の線画の圏が必要になる。一方、48 のグラフ準同型に対して、もし線画の圏が無駄に多すぎる射をもつ場合にもグラフ埋め込みによる符号化は効率的ではない (冗長な変換を指定するコストが追加的に必要になる) ことになる。従って、グラフ埋め込みで符号化するのにちょうどよい (i.e., 自然な関手間の全単射) 構造をベクトル空間上の線画の圏がもちうるか、ということが次の問題になる。

これを具体的に考えていこう。2 次元あるいは 3 次元空間に埋め込まれた線画が与えられたとき、その線画を不変にするアフィン変換群を考える。アフィン変換群とは、可逆な線形変換に加えて平行移動変換から構成される群である。

ネッカー平面図の場合、一般に恒等変換以外には 1 つのアフィン変換とその逆しか持たない。具体的には平面図の重心を中心とした 180 回転の下で、ネッカー平面図は同じネッカー平面図に戻る。従って、その 180 変換と 0 変換 (恒等変換) をもつ位数 2 の巡回群に同型なアフィン変換群の部分群で特徴づけられる (図 3(a), (b))。従って、明らかにネッカーグラフの 48 の準同型からネッカー平面図を不変にするアフィン変換群への全単射は存在しない。

一方、同じネッカーグラフを 3 次元空間に埋め込んだ一例である立方体 (図 3(c)) を不変にする変換群は、アフィン変換群の位数 (= 変換の集合の要素数) 48 の部分群になる。つまり、ある立方体に対して、その線画 (3 次元上の点群) を変えない 48 通りの配置の変換がある。図 3(d) に、立方体の各頂点に 1, 2, ..., 8 とラベル付け、図 3(c) の $\bar{A}$ と $\bar{H}$ に頂点 1 と 8 を固定した場合にとり得る立方体の異なる 6 つの配置を図示した。これらの 6 配置は、 $\bar{A}$ と $\bar{H}$ を通る直線を軸とした 120 回転か、 $\bar{A}, \bar{D}, \bar{H}$ を通る平面对称な鏡映変換によって得られる。立方体では、頂点 1 を決めれば、頂点 8 の相対的な配置は決まるため、立方体を不変にする可能な頂点 1 の配置は 8 通りである。これらの 8 通りの頂点 1 の配置も、(前述のとは異なる) 鏡映変換と回転によって生成できる。従って、頂点 1 の各 8 配置それぞれに 6 通りの配置があるため、全部で 48 通りの配置の変

図3 (a) ネッカー平面図と (b) その180°回転像, (c) ネッカー立体と (d) 2 頂点 1, 8 を固定し, ネッカー立体の回転と鏡映で生成できる部分群 (頂点を 1, 2, ..., 8 とラベルづけて, (c) の $\bar{A}$ を 1, $\bar{H}$ を 8 に固定した場合).

換があることになる。

このような群の構造を復号に利用すれば、ネッカー平面図の場合は (対称性によって復号できる適当な) 半分のデータを記録すれば復号でき、立方体の場合は、適当な 1 組の頂点と 1 辺 (例えば、頂点 1, 5 とその間の辺) を記録すれば、その部分集合に前述の位数 48 のアフィン変換群を適用することで、立方体に相当する点の集合を復号できる。

ただし、ここでの復号は、アフィン同型を除いて、という但し書き付きの“一意性”を基準としている。つまり厳密な座標の値としては異なる立方体が復号されるかもしれないが、それらはすべてアフィン同型であるので (平行移動などで同じ図形にうつせるので) “同じ”とみなすと考え。

3.6 問 1 に対する答え

従って、一連の分析を総合すれば、個々の点 (画素) を独立に符号化するよりも線分へと集約した上で符号化するのがより効率的であり、さらに個々の

線分を独立に符号化するよりも、それらを結合した構造であるグラフをモチーフとした符号化のほうがより効率的である。この効率性の考え方を適用すれば、前節までの分析により、最も効率的と考えられるネッカーグラフのベクトル空間への埋め込みが存在し、それは 3 次元ベクトル空間でネッカー立体として成立すると言える。

これは、ネッカー平面図と同じグラフの 3 次元埋め込みの一つとして、ネッカー立体のほうがより高度な対称性をもつ (効率的に符号化できる) ことを意味している。そうした一例の存在は、ネッカーキューブ知覚において立体像が生起するための十分条件を示している。すなわち、「もしネッカー立体を知覚するならば、その像は符号化の上で効率的である」(効率的な符号化の方法が存在する) ことを示している。従って、これが 2.5 節の問 1. に対する答えになる。

3.7 最も効率的な符号化

次の問はその逆，すなわち問2が成り立つか，という問題である．つまり，「ネッカーグラフから3次元以上のベクトル空間へのすべての写像のうち，最も効率的な符号化はネッカー立体である．」という命題が成り立つかである．

一見，この問に答えるのは容易ではないように思える．なぜなら，ネッカーグラフを3次元空間にうつす写像はネッカー立体以外にも無限に存在し，また高次元のベクトル空間に関しても分析しなければならないため，網羅的に調べ尽くすのは困難に見えるからである．

これに対して，ネッカーグラフを含むその部分グラフ全体の集合からの3次元空間への写像の像の集合全体と，それを不変にする変換群との間の「随伴」⁶⁾に着目する．随伴とは2つの疑似的な逆の関係にある関手の間の関係で，2つの圏の射の自然な全単射，普遍射，あるいは単位・余単位などによって定義される(レンスター, 2017)．随伴は数学のいたるところに現れ(マックレーン, 2012)，圏論に固有の概念でもある(アウディ, 2015)．

ネッカーグラフやそれ以外のグラフからの写像は無限に組み合わせがあるため，問2「ネッカー立体以外にはより高い効率性をもつ構造はない」という否定的な命題を直接網羅的に変換群を調べるのは得策ではない．しかし，グラフの構造とその埋め込みによるベクトル空間上の図形の間の関係を利用して，特定の構造が固有にもつ不変量に着目することで，問題が扱いやすくなる．

具体的に言えば，もしグラフの埋め込みと線画の間に随伴があれば，グラフ準同型を前順序とみなした場合には，ネッカーグラフが最大のグラフであり，その同型は48であるということ(このグラフ同型群の位数は一種の不変量)から，それを超えるアフィン同型群は不要であることが言える．そのため，この意味でネッカー立体が(自然同型を除いて)グラフと一対一に対応する図形であることが言える．

6) 本研究で取り組む問題はまさにガロアが取り組んだ体と群の関係と類比が成り立つ．詳しくは，上記の数学ガールガロア理論(結城, 2012)が読み物としても入門書としてもわかりやすい．方程式の代数的な可解性で焦点となる体の世界(本問題で言えば，図形あるいは線画)では，無限に組み合わせがあるため，問題に答えるのは容易ではない．しかし，体と群の随伴に着目すれば，有限な組み合わせの問題に帰着できる．

3.8 線画とアフィン変換群の随伴

よって，この3次元上の線画と変換群の間にはどのような関係が成り立つかが焦点になる．4節で，3次元線画の包含関係をもつ圏と変換群の包含関係の圏の間に随伴があることを示す．

グラフ埋め込みと線画の間の随伴を示すことは，同時に高次元ベクトル空間についても分析することになる．4次元以上のベクトル空間の場合，そのある3次元部分空間上で前述の3次元ベクトル空間と同じく48以上のアフィン同型が存在する．しかし，ちょうど48のアフィン同型ではなく，これらの同型射は無限に存在する．ネッカー立体のデータ点だけは4次元以上では線形従属となり，ネッカー立体を不変にするアフィン変換が無数に存在し不定になるためである．

従って，結論として，ネッカー立体は，ネッカーグラフからベクトル空間への写像(グラフのモチーフを持つ線画)の中で，最も対称性の高い線画であることが示されたことになる．これが問2への答えである．

4. ネッカー立体知覚の圏論的モデル

4.1 点画・線画・グラフ図の圏

前節の論証のスケッチに沿って，具体的にその数学的な定式化を与えていく．まず，本研究で焦点となる視覚データであるネッカー平面図を，以下の圏の一つの射として表す．

Definition 1 (k 次元ベクトル空間上の点画・線画・グラフ図形の圏). k 次元ベクトル空間上の点画の圏，線画の圏，グラフ画の圏を以下のように定義する．

- k 次元ベクトル空間 $\mathcal{V}_k (k=1,2,\dots)$ を対象として持ち，その空間上及び空間の間の任意のアフィン変換 $a: \mathcal{V}_k \rightarrow \mathcal{V}_k$ を射として持つ圏を $\mathcal{V}$ とする．
- 圏2を2つの対象0,1とそれらの恒等射のみをもつ離散圏とする．
- 圏 $\mathcal{V}_k$ から圏2への関手を対象とする関手圏を $2^{\mathcal{V}_k}$ とし， k 次元の点画の圏と呼ぶ．またこの圏を $\mathcal{V}_k$ のべき集合(すべての部分空間の集合)と同一視する．
- 単位区間 $I = [0,1] \subset \mathcal{V}_1$ から $2^{\mathcal{V}_k}$ への写像のうち像が直線 $l_{x,y} := \{ax + (1-a)y \in \mathcal{V}_k \mid x,y \in \mathcal{V}_k, a \in I\}$ になる写像を線分と呼び，任意の線分の集合を対象として持つ圏を，圏の積

$\mathcal{L}_k \cong \mathcal{V}_k \times \mathcal{V}_k$ と同一視する．また，線分の集まりを対象とし，任意の線分の $L_k = \{l_1, \dots, l_n\}$ と $L'_k = \{l'_1, \dots, l'_{n'}\}$ が，どの $1 \leq i \leq n'$ についてもある $1 \leq j \leq n$ があり，包含写像 $k: l'_i \mapsto l_j$ を持つならば，ただ一つの射 $L_k \rightarrow L'_k$ をもつ前順序の圏を線画の圏とよび， $2^{\mathcal{L}_k}$ とかく．

- 各グラフ $G = (V, E)$ を頂点の集合 V と辺の集合 E とを対象と持ち，射 $E \xrightarrow[\tau]{s} V$ を持つ圏とし， $\mathcal{G}$ を任意の有限グラフを対象とし，グラフの間の準同型を射としてもつ圏とする．
- グラフの圏 $\mathcal{G}$ から $\mathcal{V}_k$ の圏への関手 F を，任意の $G = (V, E)$ について対象を $L_V := \{l_{F(v), F(v)}\}_{v \in V}$ ， $L_E := \{l_{F \circ s(e), F \circ t(e)}\}_{e \in E}$ にうつす $F: (V, E) \mapsto L_V \cup L_E$ とし，射 $E \xrightarrow[\tau]{s} V$ を線分の端点 (の集合) から線分にうつす包含写像にうつす関手 $L_E \xrightarrow[\tau]{F(s)} L_V$ とする．アフィン変換による自然変換を射とする関手圏 $2^{\mathcal{L}_k \times \mathcal{G}}$ をグラフ画の圏とする．

以上の点画，線画，グラフ画の定義から，以下の点画と線画の圏の間の随伴を得る．

Lemma 1 (点画の圏と線画の圏の随伴)．忘却関手 $U: 2^{\mathcal{L}_k} \rightarrow 2^{\mathcal{V}_k}$ を， $U: \{l_1, l_2, \dots, l_n\} \mapsto l_1 \cup l_2 \cup \dots \cup l_n$ とし， $U(2^{\mathcal{L}_k})$ で忘却関手の像となる $2^{\mathcal{V}_k}$ の部分圏とする．自由関手 $F: 2^{\mathcal{V}_k} \rightarrow 2^{\mathcal{L}_k}$ を，部分集合 $X \in 2^{\mathcal{V}_k}$ に対し，その部分集合の各点 $x \in X$ を線分とみた線画 $F(X) = \{l_x\}_{x \in X}$ を割り当てる関手とする．このとき，関手 F は U の左随伴

$$2^{\mathcal{V}_k} \xleftarrow[\tau]{F} 2^{\mathcal{L}_k}$$

である．

Proof. 自由関手 F の定義より，任意の線画 $L \in 2^{\mathcal{L}_k}$ に対して，ある対象 $G(L)$ が存在して任意の対象 $X \in 2^{\mathcal{V}_k}$ からの射 $g: X \rightarrow G(L)$ が一意に存在して，任意の射 $f: F(X) \rightarrow L$ を，自然変換 (余単位) $\varepsilon_L: F \circ G(L) \rightarrow L$ で $f = \varepsilon_L \circ F(1_X)$ と表せる．すなわち以下の図式が可換である：

$$\begin{array}{ccc} F(X) & & \\ \downarrow F(g) & \searrow f & \\ F \circ G(L) & \xrightarrow{\varepsilon_L} & L \end{array}$$

$F(g)$ の存在は，関手 F による像 $F(X')$ が L への射を持つ対象の中で最も大きな圏 $2^{\mathcal{V}_k}$ の対象が $G(L)$ である ($X' \subseteq G(L)$) ことから，任意の射 $g: X \rightarrow G(L)$ が存在することから言えて， $F(g)$ の一意性は圏 $2^{\mathcal{L}_k}$

の射が包含写像であることから言える．

次に，関手 F, G の定義より $G \circ F = 1_{2^{\mathcal{V}_k}}$ であるため，任意の対象 $X \in 2^{\mathcal{V}_k}$ について，もしある対象 $L \in 2^{\mathcal{L}_k}$ への射 $g: X \rightarrow G(L)$ が存在すれば，適当な射 f により $g = G(f)$ とできるので以下の図式が可換である：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{1_X} & G \circ F(X) \\ & \searrow g & \downarrow G(f) \\ & & G(L) \end{array}$$

従って，この普遍射の存在により $F \dashv U$ ． $\square$

この補題 1 は，線画の圏の前順序の構造を用いれば，(面のない) 点画から (点画と一致する範囲で極大的な) 線画が一意的に構築できること，逆に線画の圏から点画が一意的に構築できることを意味する．

次に，線画の圏とグラフ画の圏の間の随伴について述べる．

Lemma 2 (線画の圏とグラフ画の圏の間の随伴)．各グラフ $G_i = (V_i, E_i) \in \mathcal{G}$ から $2^{\mathcal{L}_k}$ への関手

$$H_i: (E_i \xrightarrow[\tau]{s_i} V_i) \mapsto \left(H_i(E_i) \xrightarrow[\tau]{H_i(s_i)} H_i(V_i) \right)$$

から忘却関手

$$H: \{H_i\} \mapsto \bigcup_{i=1}^n H_i(E_i) \xrightarrow[\tau]{\bigwedge_{H_i(s_i)} \bigvee_{H_i(t_i)}} \bigcup_{i=1}^n H_i(V_i)$$

を構成する．

次に，自由関手 $K: 2^{\mathcal{L}_k} \rightarrow 2^{\mathcal{L}_k \times \mathcal{G}}$ を，以下のように定める．各線分の集合 L に対に対応する最大被覆線分集合 $L_* := FG(L) = \{l_1, \dots, l_n\}$ に対し，あるグラフ $X_i = (V_i, E_i)$ からその各線分 l_i への割り当て $G_*: X_i \mapsto l_i$ を，各線分 $l_i \in L_*$ に辺 $\{e\} = E_i$ を，線分 l_2 の端点 $\{x\}, \{y\} \subset l_i$ に頂点 $\{v_s = s(e), v_t = t(e)\} = V_i$ を考える．グラフ集合が $Y = \{Y_1, \dots, Y_m\}$ が $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ に対し，どの $1 \leq i \leq n$ に対してもある $1 \leq j \leq m$ があり $\mathcal{G}$ の射であるグラフ準同型 $f: X_i \rightarrow Y_j$ が存在すれば，グラフ集合の射 $Y \rightarrow X$ を定める．このとき，与えられた線分集合 L_* に対応するグラフ集合 X に射をもつグラフ集合 X' のうち，このような任意のグラフ X' に対して一意に射をもつグラフ集合を X_* とする．そして，線画の圏からグラフ画の圏への自由関手を $K: L \mapsto (X_* \rightarrow L_*)$ と定める．このとき，関手 K は H の右随伴 $K \dashv H$ である．

Proof. 補題 1 同様に普遍射の存在により示せる． $\square$

以上の二つの補題から、図 2(a), (b), (c) の間に随伴があることが分かる。つまり、点の集まりから線の集まりへ、そしてグラフの集まりへと構造を付与した符号化を左随伴関手により可能で、また逆に右随伴関手を使うことでデータを復号することができる。ただし、与えられる視覚データ (網膜像/ビットマップ画像) のパターン (図 2(c)) により、最終的に得られるグラフ構造は異なる (図 2(a))。最も構造の乏しい場合、視覚データ上の各点ごとに 1 つの頂点のみを持つグラフを割り当てることになり、実質的に点ごとに符号化するとグラフによる符号化に違いがなくなる。逆に、最も高度な構造を持つ場合、1 つのグラフですべてのデータ上の点を符号化できる。

4.2 ネッカーキューブ現象の分析

前節で提示した本研究の知覚情報処理の圏論的な定式化の下で、ネッカー平面図の視覚データはどのような性質をもつのだろうか。結論から言えば、ネッカー平面図の点集合の符号化 (2 つの左随伴の合成) によって、ネッカー立体に対応するネッカーグラフの 3 次元空間への埋め込みが得られる。すでに 3 節で述べた通り、ネッカーグラフのグラフ同型と自然に 1 対 1 対応するベクトル空間上の線分の集合 (とそれを不変にするアフィン同型群) が存在する。つまり、ネッカー平面図のデータは 1 つのネッカーグラフの埋め込みにより符号化でき、そしてグラフ画の圏の射の構造が前順序であり、随伴の性質から、グラフを不変にする準同型の数 (群の位数) を超える符号化は存在しないとも言える。従って、上記の知覚情報処理の下では、ネッカー立体が知覚されると予測される。

これを具体的に、確認しよう。定義 1 のグラフ画の圏において、平面上の線画であるネッカー平面図の一つ (図 3(a)) は、グラフ画の圏の対象の一つである関手 h_{NP} とみなせる。具体的に、ネッカーグラフ $G_N = (V_N, E_N)$ を以下の頂点の集合と辺の集合

$$\begin{aligned} V_N &= \{A, B, C, D, E, F, G, H\} \\ E_N &= \{e_{A,B}, e_{A,C}, e_{A,E}, e_{B,D}, e_{B,F}, \\ &\quad e_{C,D}, e_{C,G}, e_{D,H}, e_{E,F}, e_{F,H}\} \end{aligned}$$

とその間の射 $s, t: E_N \rightarrow V_N, s: e_{i,j} \mapsto i, t: e_{i,j} \mapsto j$ からなる圏とする。また、関手 h_{NP} がネッカーグラフ

の各頂点を (以下線分 $l_x := l_{x,x}$ と略記する)

$$\begin{aligned} h_{NP}(A) &= l_{(0,0)} \subset \mathcal{V}_2 \\ h_{NP}(B) &= l_{(1,0)} \\ h_{NP}(C) &= l_{(r\cos\theta, r\sin\theta)} \\ h_{NP}(D) &= l_{(1+r\cos\theta, r\sin\theta)} \\ h_{NP}(E) &= l_{(0,1)} \\ h_{NP}(F) &= l_{(1,1)} \\ h_{NP}(G) &= l_{(r\cos\theta, 1+r\sin\theta)} \\ h_{NC}(H) &= l_{(1+r\cos\theta, 1+r\sin\theta)} \end{aligned}$$

にうつし、辺 $e_{X,Y} \in E_N$ を線分 $l_{h_{NP}(X), h_{NP}(Y)}$ にうつし、辺から頂点への射を端点 (頂点) の集合から線分 (辺) への包含写像にうつす関手とする。また、この線画を右随伴関手 G でうつした点画が網膜像として与えられた視覚データであったとする。

このようなネッカーグラフとベクトル空間上の線画の対応は、線画の圏を点群の圏に先に述べた右随伴関手 H を使って抽象化する上では、一般には一つだけではない。つまり、複数の異なる線画の圏が、同じ点群とみなせる場合がある。2 次元平面 $\mathcal{V}_2$ の場合、特定の線画の角度パラメタ $\theta - \frac{\pi}{4} \equiv 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$ でないとき、一般に関手 h_{NC} に加えて、それと (圏 $\mathcal{V}_2$ のアフィン変換による) 自然同値な関手がある。このもう一つの関手はちょうど、頂点 $A, B, \dots, H$ を図形の重心を中心として 180 回転した線画になる。この関手を h'_{NP} とかこう。

一方、ネッカーグラフ G_N がもつグラフ同型群の構造を考えると、2 次元平面 $\mathcal{V}_2$ 上の線画 h_{NP} は、グラフの構造を埋め込むのに十分な構造を持っていないことが分かる。具体的に、ネッカーグラフ G_N の準同型で、関手 H で同じネッカー平面図 (線画) になるものについて考えよう。グラフの圏 $\mathcal{G}$ は、グラフの間の準同型を、その対象であるグラフの間の射としてもつ。グラフ g からグラフ g' への準同型とは、グラフ g の頂点を g' のいずれかにうつす写像 f で、頂点 $a, b \in g$ の間に辺があれば、頂点 $f(a), f(b) \in g'$ の間にも辺があるという条件を満たすものである。あるグラフをそのグラフ自体にうつす自明なグラフ準同型もあり、合成も可能であることから、これはグラフの圏 $\mathcal{G}$ の射と考えることができる。この射を考えた場合、ネッカーグラフ G_N に関しては、それ自身を含めて、ネッカーグラフと同型なグラフは 48 個存在する。8 つの頂点の一つを決めると、それと辺を持つ頂点 3 つの置換 6 通りがあり、それにより他の頂点の対応は決まる。従っ

て、線画を不変にする $8 \times 6 = 48$ のグラフ準同型が存在する。つまり、ネッカーグラフの構造は位数 48 の置換群とみることができる。

一方、すでに述べた通り、2 次元ベクトル空間上のネッカーグラフの表現 (ネッカー平面図) では、2 つの自然同型な関手しかなく、ネッカーグラフの全ての置換を表現することはできない。従って、2 次元ベクトル空間では、ネッカーグラフの構造をあますことなく表現することはできない。つまり、2 次元ベクトル表現は、ネッカーグラフの構造を失っていることになる。従って、 h_{NP} がネッカー平面図 (線画) の左随伴によって得られることはない。

次に、3 次元ベクトル空間上の線画を考えれば、例えば以下の関手で定義するネッカー立体が、48 の自然同型な関手を持ち、ネッカーグラフの全ての置換を表現する例であることが分かる (3.5 節の説明を参照)。

$$\begin{aligned} h_{NC}(A) &= l_{(0,0,0)} \subset \mathcal{V}_3 \\ h_{NC}(B) &= l_{(1,0,0)} \\ h_{NC}(C) &= l_{(0,0,1)} \\ h_{NC}(D) &= l_{(1,0,1)} \\ h_{NC}(E) &= l_{(0,1,0)} \\ h_{NC}(F) &= l_{(1,1,0)} \\ h_{NC}(G) &= l_{(0,1,1)} \\ h_{NC}(H) &= l_{(1,1,1)} \end{aligned}$$

この関手は、実際に随伴によって構築可能である。なぜなら、これらの線画 (3 次元上の線分の集合) から左随伴関手 K を使い、グラフ準同型に誘導された前順序を使うことで、ネッカーグラフが指定されるからである。さらに、自然変換としてベクトル空間の圏 $\mathcal{V}$ の適当なアフィン変換 $\alpha: h_{NC} \rightarrow h_{NP}$ があるため、このネッカーグラフの埋め込みから、点画の圏を復号可能である。つまり、ネッカー立体は、ネッカーグラフの埋め込みで、グラフ準同型による置換群の構造を失わない表現の一つであるといえる。言い換えると、ベクトル空間上の座標を具に覚えておかなくても、ネッカーグラフの 3 次元ベクトル空間への埋め込みであるということだけを覚えておき、自然同型を除けば (同型を除いて一意という立場を採れば)、きわめて効率的にデータを復号できる、ということの意味する。このような本質を失わない復号を可能とし、しかし、一部の構造 (上記の場合、座標の値) を “忘れてしまう” ことが、随伴による復号で可能になる。

この随伴が成り立つ場合、ネッカーグラフに関しては、ちょうど 3 次元ベクトル空間上の埋め込みがそれに対応する対象になる。なぜなら、ネッカーグラフは位数 48 の置換群で特徴づけられ、3 次元ベクトル空間でもそれが表現できるため、4 次元以上のベクトル空間である必要がないからだ。4 次元上に埋め込まれたネッカー立体には、4 次元アフィン変換群がある。48 の異なるグラフに対応する 4 次元表現の間の変換は、4 次元空間では複数存在し、一つに決まらない。そのため、変換群を構成するには、それらの変換から恣意的な選択をする必要が生じる。従って、その恣意的な選択のコスト (どの変換群を選択したか追加して覚える必要が生じる) が生じるため、4 次元表現は 3 次元表現より不利であると言える。こうした “余計に豊かな” 構造を排除するにも、随伴という概念は役立つ。なぜなら、随伴関係にある二つの圏の間の射は、自然に一对一であるため、射が存在しないこと (2 次元空間の場合) も、射が冗長に存在してもあますこと (4 次元空間の場合) もないからである。

以上をまとめれば、ネッカーキューブ現象に関して、本研究の理論の帰結である (非形式的な) 以下の定理を得る。

Theorem 1. 点画としてのネッカー平面図 $G(h_{NP})$ に対応するグラフ画 $K \circ F \circ G(h_{NP})$ はネッカー立体 h_{NC} である。

5. 総合議論

5.1 知覚=随伴の構成仮説

本研究は、従来の知覚や錯視に関する理論的な研究の枠組みを超えて、圏論を基礎とした統合的な認識の理論の構築に向けた試論を展開した。議論を具体的に焦点化するために、具体的な対象として、「ネッカーキューブ」において平面図から立体的な知覚像が生起するという経験的な事象について論考を進めた。本研究で我々が提示する仮説では、知覚の情報処理を、ある種の随伴関手を構築する過程とすることで、点群の集まりとしての抽象的な視覚データを、関連付けられた直線の集まりである「線画」とみなし、さらに、ベクトル空間への埋め込みから抽象化された「グラフ画」としての構造で符号化する過程であるとする。この過程では、あるデータに対して、それと整合的な豊かな構造を持つ圏を考えられる場合、その圏によりデータを符号化する、

という一貫した情報処理が行われると考える。その中心にある概念は、本質的には同じ構造をもつ、抽象的な構造とより具体的な構造をつなぐ随伴関手の概念である。

ネッカーキューブの場合、ネッカー平面図を射影にもつような無数の可能な像のうち、高度な対称性をもち、かつ不要には構造をもたない線画の一つとして、ネッカー立体あるいはその背後にあるネッカーグラフが特徴づけられる。つまり、本研究の仮説によれば、ネッカー平面図から立体的な知覚像であるネッカー立体が生起する理由は、ネッカーグラフの3次元埋め込みとしてのネッカー立体が、ネッカー平面図の最も効率の良い(同型を除いて)唯一の符号であるからである。このような関係はどの図形でも生じるわけではない。あるグラフの3次元埋め込みで表現できるデータには、特殊な対称性(置換群)が必要であるため、その他の多くのデータは2次元平面上の図形として、あるいは3次元空間上に埋め込まれた2次元平面の構造として、さらに、どの図形としても効率的に符号化されない場合には、単に点群そのままとしての符号が与えられるだろう。一方で、実際に3次元空間にある3次元構造からの2次元射影が視覚データとして与えられた場合には、ネッカーキューブと同様に、あるグラフの3次元空間への埋め込みによって符号化できる可能性が高いと思われる。つまり、本稿で提示したネッカーキューブに関する論考をさらに推し進めることで、知覚一般の情報処理のモデルを扱うための理論的枠組みが構築できる可能性がある。

本研究では、いくつかの線分が結合して構成される「線画」の圏を議論の舞台として選んだが、この線画の圏はより一般的な視覚的なオブジェクトを扱うべく拡張できる。具体的に言えば、線画の圏の背後にあるグラフを、「1辺が3点をつなぐ」ハイパーグラフに拡張すれば、直線から2次曲線を結合した図形へと拡張でき、また辺と辺をつなぐ拡張した辺を考えれば、面を表現することもできる可能になると考えられる。図 1E, F を扱うにはこのような理論の拡張が必要である。この点で、本研究で提示した試論は、一般の視覚的なオブジェクトを捉えるための最も基礎的な原型になると期待される。

5.2 理論的な予測

ともすれば本研究の提示する理論体系は、ネッ

カーキューブ現象を説明するためだけに大げさに作りこんだように見られるかもしれない。しかし、本研究で提案する知覚情報処理の理論体系は、例えば、コッファーマンキューブ(図 1D)などの他の図形に関して、広範な予測を与える。具体的に言えば、コッファーマンキューブは、2次元平面上のアフィン群においてもそれに対応するグラフの同型群と同じ構造をもつため、ネッカーキューブと一見類似の図形であるにもかかわらず、コッファーマンキューブでは平面としての見えが立体としての見えと同等あるいはそれ以上に効率的であると理論的に予測される。つまりネッカーキューブではネッカー平面図に対して3次元構造としての符号化が容易になされる(知覚的に立体に見える)のに対し、コッファーマンキューブでは2次元構造としての符号化が優位となる。著者らの主観に基づけば、概ねその予測は妥当に思えるし、過去の研究からもコッファーマンキューブに対して3次元知覚が生じにくいことが示されている(Hochberg & Brooks, 1960)。コッファーマンキューブやネッカーキューブ以外の図形も対象とし、3次元構造が知覚される際の潜時や頻度を測定するなど、理論的予測に対する実証研究が待たれる。

5.3 認知現象の理論構築における圏論の意義

最後に、この理論には“データフィット”による調整の必要にある恣意的なパラメータが一つもないことは特筆すべき点であると言えるだろう。今後、多様な図形の知覚に関する予測を系統的に行う上で、知覚の解像度などの誤差許容量に相当するパラメータや、知覚現象における確率的な振る舞いを規定するパラメータを導入する必要があるかもしれないが、少なくともネッカーキューブ等の明確な知覚像をもつ現象に関しては定性的な数理的な分析で十分に現象の解析や説明が可能である。こうした性質の背後には、この理論を構築をする上で、圏論的な枠組み自体が極めて強い制約をもつため、恣意的に調整する余地がほとんどないという構造がある。つまり、圏論的な枠組みに則って現象を説明しようとすれば、使える概念が自然に制約されているため、恣意的な構造を精査する必要に迫られ、結果として高い整合性をもつモデル・理論しか構築できないという“利点”がある。一見これは逆説的であるが、何でも自由に設計しようと思えば設計できるプログラミング

言語は、何もかもを自分で組み立てる選択に迫られるため“不便”である，ということの裏返しに当たる．今後，認知現象を数学的に分析する「数理現象学」が開かれるとしたら，圏論はその中心的な道具になると思われる．このような数理的分析の妥当性は実験や観察により実証される必要がある．4.2 節のコッファーマンキューブは一つの事例であるが，より広範な範囲で数理現象学による知見がどのように実証可能かという点についてはさらなる議論を要するだろう．

文 献

- Hertzmann, A. (2020). Why Do Line Drawings Work? A Realism Hypothesis. *Perception*, 49 (4), 439–451.
- Hochberg, J. & Brooks, V. (1960). The psychophysics of form: Reversible-perspective drawings of spatial objects. *The American Journal of Psychology*, 73 (3), 337–354.
- Koenderink, J. J. (1984). What Does the Occluding Contour Tell Us about Solid Shape?. *Perception*, 13 (3), 321–330.
- Kornmeier, J. & Bach, M. (2005). The Necker cube - An ambiguous figure disambiguated in early visual processing. *Vision Research*, 45 (8), 955–960.
- Marr, D. (1982). *Vision*. Freeman, San Francisco.
- Nakayama, K. & Shimojo, S. (1992). Experiencing and perceiving visual surfaces. *Science*, 257 (5075), 1357–1363.
- Necker, L. A. (1832). LXI. Observations on some remarkable optical phenomena seen in Switzerland; and on an optical phenomenon which occurs on viewing a figure of a crystal or geometrical solid. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1 (5), 329–337.
- Shamir, A. (1979). How to share a secret. *Communications of the ACM*, 22 (11), 612–613.
- Todd, J. T. (2004). The visual perception of 3D shape. *Trends in Cognitive Sciences*, 8 (3), 115–121.
- アウディステープ (2015). 圏論 原著第 2 版. 共立出版. 前原 和寿 (翻訳).
- マックレーン ソーンダース (2012). 圏論の基礎. 丸善出版. 三好 博之 (翻訳), 高木 理 (翻訳).
- チュートリアル記事著者 (2021). チュートリアル記事 (仮) 認知科学, 28 (1), 1–13.
- レンスター トム (2017). ベーシック圏論 普遍性からの速習コース. 丸善出版. 斎藤 恭司 (監修), 土岡 俊介 (翻訳).
- ホフマン ドナルド (2003). 視覚の文法: 脳が物を見る法則. 紀伊國屋書店.
- 林部 敬吉 (2001). 心理学における 3 次元視研究の動向: 2000 静岡大学情報学研究, 6 (October), 1–20.
- 結城 浩 (2012). 数学ガール/ガロア理論. SB クリエイティブ.
- 今井 四郎・天野 要 (1998). 変換と写像の概念に基づくパターン認知論 応用数理, 8 (1), 30–45.
- 日高 昇平 (2016). 情報の伝達から理解へ 人工知能学会論文誌, 31 (6), 1–10.
- 新美 亮輔・横澤 一彦 (2007). 対称性の視知覚とその役割 心理学評論, 50 (2), 119–134.